$K = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

$\cancel{\mathbb{Z}}$

__Beweis:__ $\text{Lös}(A) = \{ \underline{x} \in K^n \mid \underbrace{A \cdot \underline{x}} = \underline{0} \}$

$= \{ \underline{x} \in K^n \mid F_A(\underline{x}) = \underline{0} \}$

$= \text{Ker}(F_A)$

Also ist $\text{Lös}(A)$ ein UVR.

Rangsatz angewendet auf

$$K^n \xrightarrow{F_A} K^m :$$

$$\underbrace{\dim(K^n)}_{n} = \underbrace{\dim(\text{Ker}(F_A))}_{\dim(\text{Lös}(A))} + \underbrace{\dim(\text{Im}(F_A))}_{\text{Rang}(A)}$$

□

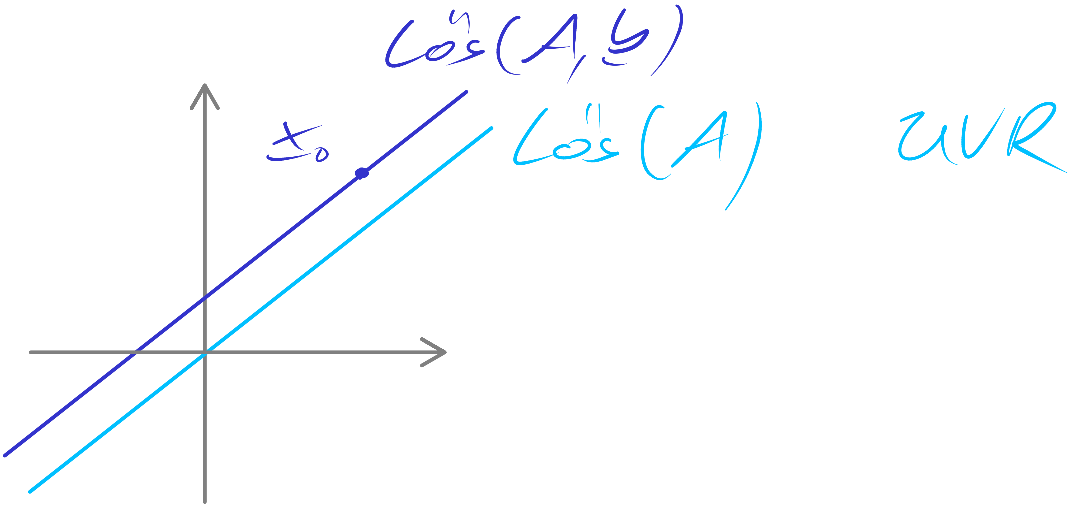
Beweis:

$$\mathrm{Rang}(A) \underset{\mathrm{Im}(F_A) \subset K^m}{\leq} m \overset{\text{Voraussetzung}}{<} n$$

Daher

$$\dim(\mathrm{Lös}(A)) \overset{\text{Satz}}{=} n - \mathrm{Rang}(A) > 0.$$

□



Beweis:

$$\mathrm{Lös}(A,\underline{b}) = F_A^{-1}(\underline{b}) \overset{\text{Vorlesung 25}}{=} \begin{cases} \emptyset \\ \underline{x}_0 + \mathrm{Ker}(F_A) & \text{für ein } \underline{x}_0 \in \mathrm{Ker}(F_A) \end{cases}$$

□

Beispiele:

$$\text{Lös}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \{\underline{0}\} \qquad \text{UVR Dim. } 0$$

$$\text{Lös}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \{\underline{0}\}$$

$$\text{Lös}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, y \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \text{span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{UVR Dim } 1$$

$$\text{Lös}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \emptyset$$

$$\text{Lös}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, y \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, y \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Beweis:

Für $A \in M(l \times m; K)$
$B \in M(m \times n; K)$

ist nach Definition

$$(i\text{-te Zeile von } A \cdot B) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} (j\text{-te Zeile } B)$$

$$(k\text{-te Spalten von } A \cdot B) = \sum_{j=1}^{m} (j\text{-te Spalte von } A) \cdot b_{jk}$$

Rechnen nun durch. z.B. $E_{k\underset{l}{\lambda}} \cdot A$:

$$(l\text{-te Zeile von } E_{k\underset{l}{\lambda}} \cdot A) = \sum_{j=1}^{m} e_{lj} \cdot (j\text{-te Zeile von } A)$$

$$= \lambda \cdot (k\text{-te Zeile von } A) \quad \xleftarrow{} j = k$$

$$1 \cdot (l\text{-te Zeile von } A) \quad \xleftarrow{} j = l$$

...

☐

Beweis Folgt aus $F_{A \cdot B} = F_A \circ F_B$ □

Beweis:

$$K^n \xrightarrow{F_A} K^n$$

$$\left(F_A \text{ Isom.}\right) \Longleftrightarrow \left(F_A \text{ surjektiv}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\mathrm{Im}(F_A) = K^n\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(\underbrace{\dim(\mathrm{Im}(F_A))}_{\mathrm{Rang}(A)} = n\right)$$

□

Ende Vorlesung 14

Beweis:

$$E_{k\leftrightarrow l}\cdot E_{k\leftrightarrow l}$$

$$= \underbrace{E_{k\leftrightarrow l}\cdot \underbrace{(E_{k\leftrightarrow l}\cdot E_n)}_{\text{wende Satz an}}}_{\text{wende Satz an}}$$

$$= E_n$$

usw. $\square$

Beweis:

$$(\hat{A},\hat{b}) = S\cdot(A,b), \quad S \text{ invertierbar}$$

$$= (S\cdot A, S\cdot b)$$

$$\text{Lös}(\hat{A},\hat{b}) = \{x \mid \hat{A}\cdot x = \hat{b}\} \quad s!$$

$$= \{x \mid \boxed{S\cdot A\cdot x = S\cdot b}\}$$

$$\text{Lös}(A,b) = \{x \mid A\cdot x = b\} \quad \square$$

Beweis: 2) folgt aus 1)

zu 1: Zzz: $\mathrm{Rang}(AT) = \mathrm{Rang}(A)$

$\mathrm{Rang}(SA) = \mathrm{Rang}(A)$

Übersetzung in lineare Abb.:

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "\cong", "F_T"'] & K^n \arrow[r, "F_A"'] & K^m \arrow[r, "\cong", "F_S"'] & K^m \\
F_T^{-1}(y) =: \underline{z} \arrow[r, mapsto] & \underline{y} \arrow[r, mapsto] & \overset{\cup}{\underline{x}} &
\end{tikzcd}$$

- $\mathrm{Rang}(F_A) = \mathrm{Rang}(F_A \circ F_T)$, denn
  $\mathrm{Im}(F_A) = \mathrm{Im}(F_A \circ F_T)$.

- $\mathrm{Rang}(F_A) = \mathrm{Rang}(F_S \circ F_A)$, denn
  $\mathrm{Im}(F_A) \cong \mathrm{Im}(F_S \circ F_A)$;
  ein Isomorphismus ist gegeben durch Einschränkung von F_S.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Im}(F_A) \arrow[r, shift left, "\cong"] & \mathrm{Im}(F_S \circ F_A) \arrow[l, shift left] \\
K^m \arrow[u, phantom, "\cap"] \arrow[r, shift left, "F_S"] & K^m \arrow[u, phantom, "\cap"] \arrow[l, shift left, "F_S^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

$\square$